MECHANICKÉ ANALOGY VISKOELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

Petr Vojtěchovský

I ÚVOD

I.1 CHARAKTERISTICKÉ RYSY NENEWTONOVSKÝCH TEKUTIN

Mechanika nenewtonovských tekutin patří k prudce se rozvíjejícím oblastem nelineární mechaniky kontinua. Zvláště významné jsou její aplikace v chemii, potravinovém průmyslu, geologickém inženýrství, apod.

Pojem *nenewtonovská tekutina** je přiřazen ke všem tekutinám, jejichž chování (proudění) nelze zachytit modelem lineárně viskózní tekutiny. *Lineárně viskózní* (často též *newtonovskou*) tekutinou rozumíme model tekutiny, kde tenzor napětí $\mathbf{T}$ je lineární tenzorovou funkcí symetrizovaného gradientu rychlosti $\mathbf{D}(\mathbf{v})$, tzn. model, který je určen Stokesovým vztahem

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mu > 0, \tag{1}$$

kde $2\mathbf{D}(\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T$, $\mathbf{v}$ je rychlostní pole a μ je viskozita.

Polymery, biologické tekutiny, barviva, chemické roztoky, tekuté krystaly, to jsou jen některé příklady nenewtonovských materiálů.

Vzhledem k zápornému charakteru definice nenewtonovských tekutin (třída materiálů, které <u>ne</u>splňují (1)), je nutné a užitečné:

- charakterizovat základní odchylky mezi newtovovskými a nenewtonovskými tekutinami
- klasifikovat modely nenewtonovských tekutin.

Nejdůležitější jevy, jež jsou charakteristické pro nenewtonovské tekutiny jsou:

a) schopnost tekutin zesílit či zeslabit smyk při smykovém tření,
b) přítomnost (nenulových) rozdílů normálových napětí ve smykovém poli,
c) přítomnost přednapětí (yield stress),
d) schopnost materiálu "téct" (creep),
e) schopnost materiálu relaxovat napětí (stress relaxation).

Nenewtonovská tekutina přitom může vykazovat buď jen jednu z výše uvedených charakteristik, nebo jich může splňovat víc najednou.

Podle typu modelů užívaných k popisu nenewtonovských tekutin rozlišujeme následující třídy:

a) tekutiny diferenciálního typu,
b) tekutiny rychlostního typu,
c) tekutiny integrálního typu,
d) tekutiny stochastického typu.

---

*Uvažujeme pouze nestlačitelné tekutiny, pro které celkový tenzor napětí $\mathbf{S}$ je dán vztahem $\mathbf{S}$ = -p$\mathbf{I}$+$\mathbf{T}$, kde p je tzv. hydrostatický tlak.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Cílem této práce není rozbor všech charakteristik či tříd modelů nenewtonovských tekutin. V tomto směru odkazuji na [Sch], [Hui] nebo [Raj].

Zaměříme se pouze na creep a napěťovou relaxaci. Poněvadž schopnost relaxovat napětí či téct mají i nelineární pevné látky, budeme je uvažovat také. Ukážeme, že některé modely lze odvodit jen pouhým skládáním (paralelním nebo sériovým) jednoduchých mechanických analogů pro lineární viskózní tekutiny (tlumič) a lineární pevnou látku (pružina).

Tak získáme modely jak pro viskoelastické pevné látky, tak i pro viskoelastické tekutiny a ukážeme, že je lze zařadit do třídy modelů tekutin integrálního i rychlostního typu (odvozením potřebných rovnic).

Veškeré úvahy budou prováděny pro jednodimenzionální deformaci. Příkladem je *smykové proudění.* jež je dáno vektorovým polem $(v_1(x_2,t),0,0)$.

Mějme posunutí $\mathbf{u}=(u(x_2,t),0,0)$ a vektorové pole $\mathbf{v}(x_2,t)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_2,t),0,0\right)$. Uvažujme tenzor malých deformací $2\varepsilon(\mathbf{u})=\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T$ a již zmíněný gradient rychlosti $2\mathbf{D}(\mathbf{v})=\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T$. Při označení $\epsilon=\varepsilon_{12}$ platí v našem případě $\dot{\epsilon}=\dot{\varepsilon}_{12}=\mathbf{D}_{12}$. Definujme ještě $\sigma=\mathbf{T}_{12}$.

Podle definice jsou σ a ϵ funkcemi času t a polohy x_2. Nadále však budeme předpokládat, že materiál je homogenní, tzn., že vztah mezi napětím a deformací je stejný pro každé $x_2\in\Omega$, kde $\Omega\subset\mathbb{R}$. Potom σ a ϵ jsou pouze funkcemi času, tj.

$$\sigma,\epsilon:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

I.2 DEFINICE CREEPU A NAPĚŤOVÉ RELAXACE

Nechť je deformace ϵ zadána následovně(viz obr.1):

$$\epsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0,\\ \epsilon_0>0 & t\geq 0.\end{cases}$$

Pak napětí, jež bylo rovno nule pro $t<0$, v čase t=0 ihned dosáhne hodnoty σ_0 a poté klesá s časem (obr.2).

obr.1

obr.2

Schopnost materiálu pozvolně uvolňovat (snižovat) velikost napětí při konstantní deformaci se nazývá *napěťová relaxace.*

Nyní uvažujme napětí σ definované (obr.3):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \sigma_0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Situaci, kdy dochází ke konkávnímu růstu deformace ϵ při konstantním napětí σ nazveme *creep.* Graf závislosti ϵ na t potom vypadá přibližně jako na obrázku 4.

obr.3 obr.4

Z grafu závislosti ϵ na t při creep lze rozpoznat, jestli pokus provádíme s pevnou látkou nebo tekutinou. Jak, to ukazuje následující kapitola.

I.3 CREEP REÁLNÝCH VISKOELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

Na obrázcích 5 a 6 jsou zobrazeny závislosti ϵ na t pro acetát celulózy (obr.5) a laminát (obr.6). Oba grafy jsou převzaty z [W&R].

.

obr.5 obr.6

Všimněme si, že pro t $\to \infty$ se jednotlivé křivky asymptoticky blíží k přímkám s kladnou směrnicí. Právě směrnice zmíněných přímek je jedním z kritérií, které určí, zda chování materiálu je blízké tekutinám či pevným látkám:

> Je-li směrnice kladná, jde o tekutinu; je-li směrnice nulová (tzn. křivka se blíží ke konstantě), jedná se o pevnou látku.

Další kritéria si uvedeme až poté, co prostudujeme creep a napěťovou relaxaci nejjednodušších modelů pro viskózní pevné látky (tj. lineární pružinu) a lineárně viskózní tekutiny (tj. lineární tlumič).

I.4 MODELY LINEÁRNĚ VISKÓZNÍ PEVNÉ LÁTKY A TEKUTINY

Lineární pružina je jistě natolik standardním prvkem, že ji není třeba zvlášť popisovat. Věnujme se tedy lineárnímu tlumiči.

Lineární tlumič je vlastně píst, který velmi těsně doléhá do vany přičemž mezi stěnami pístu a vany je lineárně viskózní tekutina (viz obr.7).

obr.7

Právě díky tomu, že vrstva tekutiny je velmi tenká, lze proudění v ní považovat za smykové a tedy chování tlumiče za stejně ideální jako chování pružiny.

Vzhledem k tomu, že nás bude zajímat chování obou modelů ve stejných situacích, popíšeme je paralelně.

Symbol označuje lineární pružinu,

symbol lineární tlumič.

Veličiny potřebné k popisu modelů

F ... síla	F ... síla
E ... modul pružnosti	μ ... viskozita
Δ ... prodloužení pružiny	Δ ... prodloužení tlumiče
ϵ ... relativní prodloužení pružiny, deformace pružiny	ϵ ... relativní prodloužení tlumiče, deformace tlumiče
σ ... normálové napětí	σ ... normálové napětí
l_0 ... klidová délka pružiny	l_0 ... klidová délka tlumiče

Znázornění situace

Silová odezva

(1P) $F(t) = E\Delta(t)$ (1T) $F(t) = \mu\dot{\Delta}(t)$

Napětí

(2P) $\sigma(t) = E\epsilon(t)$ (2T) $\sigma(t) = \mu\dot{\epsilon}(t)$

Povšimněme si, že silové odezvy a napětí jsou pro oba modely zcela symetrické a vzniknou záměnou F $\leftrightarrow \sigma, \Delta \leftrightarrow \epsilon$. Této symetrie budeme využívat v pozdějších úvahách, neboť odvození silových odezev je zpravidla názornější.

Podívejme se nyní, jak se chovají jednotlivé modely při creep, resp. při napěťové relaxaci.

Creep

Zajímavý je graf $\epsilon = \epsilon(t)$ (obr.8), který ukazuje, jak jednoduché formy nabývá creep u newtonovských tekutin (porovnej s creep reálných materiálů).

obr.8

Napěťová relaxace

Platí $\epsilon(t) = \epsilon_0$ H(t), kde H je Heavisideova funkce. V appendixu A je odvozeno, že $\dot{H}(t) = \delta$ ve smyslu distribucí. Proto graf $\sigma = \sigma(t)$ vypadá takto:

Uvedené grafy nám budou vodítkem při sestavování kritérií potřebných k tomu, abychom rozpoznali, zda modely, které zkonstruujeme budou vhodné spíše pro pevné látky nebo pro tekutiny.

Při klasifikaci modelů budeme tedy požadovat,

aby model pro pevnou látku splňoval:
- -při creep $\epsilon(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$ konst.,
- -při napěťové relaxaci $\sigma(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$ konst. > 0,

aby model pro tekutinu splňoval:
- -při creep $\epsilon(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$ přímka s kladnou směrnicí (srovnej s grafy reálných viskoelastických materiálů)
- -při napěťové relaxaci $\sigma(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$ 0.

I.5 CREEP FUNKCE, FUNKCE NAPĚŤOVÉ RELAXACE

V minulé kapitole bylo patrné, že chování modelů závisí na hodnotách ϵ_0 a σ_0 při creep a napěťové relaxaci. Abychom se této závislosti vyhnuli, zavedeme následující funkce:

- *Creep funkci* definovanou $\mathcal{J}(\mathrm{t})=\frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}$,
- *Funkci napěťové relaxace* definovanou $\mathcal{G}(\mathrm{t})=\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$.

I.6 CÍL PRÁCE

Protože chování viskoelastických materiálů je poměrně komplikované, používá se k jejich popisu často jednodušších modelů, které dobře sledují vlastnosti těchto materiálů.

Nejběžnější je popis pomocí LCR obvodů (tj. obvodů sestávajících z cívky, kondenzátoru a rezistoru) a také pomocí mechanických analogů. My jsme se vydali druhou cestou a už jsme popsali chování lineární pružiny a lineárního tlumiče. Udělali jsme to, protože tyto dva modely newtonovských (!) materiálů použijeme jako stavební prvky modelů materiálů nenewtonovských.

Přes jednodušší dvouprvkové modely se později (část III) dostaneme k modelům tříprvkovým.

Cílem této práce je nalézt popisující matematický aparát ke všem těmto modelům a provést jejich klasifikaci na modely vhodné k popisu pevných látek a modely vhodné k popisu tekutin.

Přestože se budu snažit o jednoduchost podání, neobejdu se v některých partiích bez pro mě ne zcela běžných matematických nástrojů jako jsou Laplaceova transformace, distribuce atd., které jsou pro srozumitelnost všechny uvedeny v appendixech této práce.

II JEDNODUCHÉ MODELY NENEWTONOVSKÝCH MATERIÁLŮ

V této části se budeme zabývat vlastnostmi modelů složených ze dvou různých prvků. Sériové napojení se nazývá *Maxwellův model*, paralelní *Kelvinův model*.

Struktury popisu, kterou ukážeme u Maxwellova modelu, se budeme důsledně držet u všech popisovaných modelů, a to i ve třetí části.
Tato struktura je následující:

a) odvození diferenciální rovnice modelu,
b) chování modelu při napěťové relaxaci a odvození funkce napěťové relaxace,
c) chování modelu při creep a odvození creep funkce,
d) relace napětí → deformace,
e) relace deformace → napětí,
f) shrnutí získaných poznatků o modelu.

Ještě je potřeba říct , že pod pojmem relace *napětí → deformace* budeme rozumět odvození explicitní formule pro σ jakožto funkce ϵ a že pojem relace *deformace → napětí* bude přiřazen vzorci pro funkci ϵ jakožto funkce σ. Pro tato vyjádření budeme používat funkce napěťové relaxace $\mathcal{G}$ a creep funkce $\mathcal{J}$.

II.1 MAXWELLŮV MODEL

II.1.a Rovnice Maxwellova modelu

Grafický popis:

Písmeno označující prvek v náčrtku je zároveň indexem u jemu odpovídajících veličin. Veličiny bez indexů přísluší vždy celému modelu. Využíváme označení veličin zavedené v kapitole I.4.

Rozbor sil: vzhledem k sériovému napojení je F(t)=$F_P(t) = F_T(t)$
Geometrie: $\Delta(t) = \Delta_P(t) + \Delta_T(t)$
Deformační vztahy: $\epsilon(t) = \epsilon_P(t) + \epsilon_T(t)$, $\dot\epsilon(t) = \dot\epsilon_P(t) + \dot\epsilon_T(t)$
Z (1P) a (1T) dostáváme $\dot\epsilon(t) = \frac{\dot\sigma(t)}{E_P} + \frac{\sigma(t)}{\mu_T}$
a označíme-li $q_1 = 1, p_1 = \frac{1}{E_P}, p_0 = \frac{1}{\mu_T}$, máme

(1M) $$q_1\dot\epsilon(t) = p_1\dot\sigma(t) + p_0\sigma(t)$$

K úplnému popisu nám chybí ještě počáteční podmínka, kterou určíme takto:

Zajímá nás $\lim_{t\to 0_+}\epsilon(t)$ a $\lim_{t\to 0_+}\sigma(t)$ (označme je $\epsilon(0_+)$ a $\sigma(0_+)$).
Nechť $\sigma_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma(t)$, $\epsilon_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon(t)$, $\sigma_n(0) = \epsilon_n(0) = 0$,
$\sigma_n, \epsilon_n \in C^1(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$, $|\sigma_n| \le \sigma, |\epsilon_n| \le \epsilon$.

Integrací (1M) dostáváme

$$q_1 \int_0^\delta \dot{\epsilon}_n(t)dt = p_1 \int_0^\delta \dot{\sigma}_n(t)dt + \int_0^\delta \sigma_n(t)dt,$$
$$q_1 \Big[\epsilon_n(t)\Big]_0^\delta = p_1 \Big[\sigma_n(t)\Big]_0^\delta + p_0 \int_0^\delta \sigma_n(t)dt$$

Protože $\sigma_n(0) = \epsilon_n(0) = 0$, platí $\quad q_1\epsilon_n(\delta) = p_1\sigma_n(\delta) + p_0\int_0^\delta \sigma_n(t)dt$.
Proveďme limitní přechod pro $n \to \infty$: $q_1\epsilon(\delta) = p_1\sigma(\delta) + p_0\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \sigma_n(t)dt$.
Protože σ_n jsou na okolí 0 omezené, dostaneme pro $\delta \to 0$

(2M) $$q_1\epsilon(0_+) = p_1\sigma(0_+).$$

Při popisu ostatních modelů nebudeme odvození počátečních podmínek provádět tak podrobně, využijeme ale právě ukázaného postupu.

II.1.b Maxwellův model - napěťová relaxace

Nechť deformace ϵ je dána vztahem

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \epsilon_0 > 0 & t >= 0. \end{cases}$$

Potom z (1M) $\quad \dot{\sigma}(t) = -\frac{p_0}{p_1}\sigma(t) \quad$ (p_1 je jistě nenulový koeficient).
Přidáme-li počáteční podmínku $\quad \sigma(0_+) = \frac{q_1}{p_1}\epsilon_0, \quad$ pak řešení $\sigma(t)$ má tvar

$$\sigma(t) = \frac{q_1}{p_1}\epsilon_0 e^{-\frac{p_0}{p_1}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Funkce napěťové relaxace je tedy dána vztahem

(3M) $$\mathcal{G}(t) = \frac{q_1}{p_1}e^{-\frac{p_0}{p_1}t}.$$

II.1.c Maxwellův model - creep

Dle definice je $\sigma(t) = \sigma_0, \quad t \geq 0$.
Z (1M) máme $\quad q_1\dot{\epsilon}(t) = p_0\sigma(t) = p_0\sigma_0$.
Integrací $\quad q_1\int_0^t \dot{\epsilon}(\tau)d\tau = p_0\sigma_0\int_0^t d\tau \quad$ dostaneme $\quad q_1(\epsilon(t) - \epsilon(0_+)) = p_0\sigma_0 t$,
takže $\quad \epsilon(t) = \epsilon(0_+) + \frac{p_0\sigma_0}{q_1}t \quad$ a dosadíme-li z (2M) $\quad \epsilon(0_+) = \frac{p_1}{q_1}\sigma_0, \quad$ obdržíme

$$\epsilon(t) = \frac{p_1}{q_1}\sigma_0 + \frac{p_0}{q_1}\sigma_0 t = \frac{\sigma_0}{q_1}(p_1 + p_0 t).$$

Hledaná creep funkce je tedy tvaru

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{q_1}(p_1 + p_0 t). \tag{4M}$$

II.1.d Maxwellův model - relace napětí → deformace

Protože $\frac{q_1}{p_1}\dot\epsilon(t) = \dot\sigma(t) + \frac{p_0}{p_1}\sigma(t)$ a $(\sigma(t)e^{\frac{p_0}{p_1}t})^\bullet = \dot\sigma(t)e^{\frac{p_0}{p_1}t} + \sigma(t)\frac{p_0}{p_1}e^{\frac{p_0}{p_1}t}$,
platí $\frac{q_1}{p_1}\dot\epsilon(t)e^{\frac{p_0}{p_1}t} = (\sigma(t)e^{\frac{p_0}{p_1}t})^\bullet$.
Integrací mezi 0 a t dostáváme

$$\int_0^t (\sigma(\tau)e^{\frac{p_0}{p_1}\tau})^\bullet d\tau = \sigma(t)e^{\frac{p_0}{p_1}t} - \sigma(0_+) = \frac{q_1}{p_1}\int_0^t \dot\epsilon(\tau)e^{\frac{p_0}{p_1}\tau}d\tau, \quad \text{tedy}$$

$$\sigma(t) = \sigma(0_+)e^{-\frac{p_0}{p_1}t} + \frac{q_1}{p_1}\int_0^t \dot\epsilon(\tau)e^{-\frac{p_0}{p_1}(t-\tau)}d\tau \overset{(2M)}{=}$$

$$= \epsilon(0_+)\frac{q_1}{p_1}e^{-\frac{p_0}{p_1}t} + \frac{q_1}{p_1}\int_0^t e^{-\frac{p_0}{p_1}(t-\tau)}\dot\epsilon(\tau)d\tau.$$

Užijeme-li (3M), získáme hledané vyjádření

$$\sigma(t) = \mathcal{G}(t)\epsilon(0_+) + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\dot\epsilon(\tau)d\tau. \tag{5M}$$

II.1.e Maxwellův model - relace deformace → napětí

Opět integrací (1M) mezi 0 a t $\quad q_1\epsilon(t) - q_1\epsilon(0_+) = p_1\int_0^t \dot\sigma(\tau)d\tau + p_0\int_0^t \sigma(\tau)d\tau$.
Věta o integraci per partes implikuje rovnost

$$\int_0^t \dot\sigma(t)(t-\tau)d\tau - \Big[\sigma(\tau)(t-\tau)\Big]_0^t = \int_0^t \sigma(\tau)d\tau,$$

což dosadíme do předchozí rovnice a obdržíme

$$q_1\epsilon(t) = q_1\epsilon(0_+) + p_1\int_0^t \dot\sigma(\tau)d\tau + p_0\Big(\sigma(0_+) + \int_0^t \dot\sigma(\tau)(t-\tau)d\tau\Big) \overset{(2M)}{=}$$

$$= p_1\sigma(0_+) + \int_0^t \dot\sigma(\tau)\Big(p_1 + p_0(t-\tau)\Big)d\tau + p_0\sigma(0_+)t.$$

Neboli $\quad \epsilon(t) = \int_0^t \dot\sigma(t)\Big(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_0}{q_1}(t-\tau)\Big)d\tau + \Big(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_0}{q_1}t\Big)\sigma(0_+)$, $\quad$ a (4M) dává

$$\epsilon(t) = \mathcal{J}(t)\sigma(0_+) + \int_0^t \dot\sigma(\tau)\mathcal{J}(t-\tau)d\tau, \tag{6M}$$

a to jsme chtěli vyjádřit.

II.1.F Maxwellův model - shrnutí

obr.10 obr.11

Na obrázku 10 vidíme, že napěťová relaxace je u Maxwellova modelu poměrně přesná . Podle kritérií z kapitoly I.4 sice Maxwellův model patří mezi modely pro nenewtonovské tekutiny, avšak není příliš vhodný, protože při creep testu je creep funkce (obr.11) lineární, což neodpovídá experimentům (viz I.3).

II.2 KELVINŮV MODEL

II.2.A Rovnice Kelvinova modelu

Grafický popis:

Rozbor sil: protože jde o paralelní zapojení, platí F(t)=$F_P(t) + F_T(t)$
Geometrie: $\Delta(t) = \Delta_P(t) = \Delta_T(t)$
Deformační vztahy: $\sigma(t) = \sigma_P(t) + \sigma_T(t)$
Z (2P) a (2T) $\sigma(t) = E_P\epsilon(t) + \mu_T\dot{\epsilon}(t)$
a označíme-li $q_1 = \mu_T$, $q_0 = E_P$, $p_0 = 1$, dostáváme

(1K) $$p_0\sigma(t) = q_0\epsilon(t) + q_1\dot{\epsilon}(t).$$

Počáteční podmínka:

ϵ má nespojitost v t=0, $\epsilon(t) = 0 \quad \forall t < 0$, $\lim_{t\to 0_+} \epsilon(t) = \epsilon(0_+) \geq 0$.
Integrací (1K) a zavedením $\sigma_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} \sigma(t)$, $\epsilon_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} \epsilon(t)$ dostáváme

$$p_0 \lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_n(\tau)d\tau = 0 + q_1 \lim_{\delta\to 0}\Big(\epsilon(\delta) - \epsilon(-\delta)\Big) = q_1\epsilon(0_+), \quad \text{takže}$$

(2K) $$\epsilon(0_+) = 0.$$

II.2.B Kelvinův model - napěťová relaxace

V appendixu A je odvozeno, že $\dot{\epsilon}(t) = \delta(t)\epsilon_0$, kde δ je delta funkce reprezentující Diracovo zobrazení soustředěné v bodě 0.
Dosazením do (1K) platí v distributivním smyslu

$$p_0\sigma(t) = q_0\epsilon_0 + q_1\delta(t)\epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(t) = \Big(\frac{q_0}{p_0} + \frac{q_1}{p_0}\delta(t)\Big)\epsilon_0.$$

Funkce napěťové relaxace má tvar

(3K) $$\mathcal{G}(t) = \frac{q_0}{p_0} + \frac{q_1}{p_0}\delta(t).$$

II.2.c Kelvinův model - creep

Z (1K) obdržíme $\frac{p_0}{q_1}\sigma_0 = \dot{\epsilon}(t) + \frac{q_0}{q_1}\epsilon(t)$ a obdobnou úvahou jako u Maxwellova modelu (II.1.d) dospějeme k $\frac{p_0}{q_1}\sigma_0 e^{\frac{q_0}{q_1}t} = \left(\epsilon(t)e^{\frac{q_0}{q_1}t}\right)^{\bullet}$.
Integrací tohoto vztahu od 0 do t dostáváme

$$\frac{p_0}{q_0}\sigma_0(e^{\frac{q_0}{q_1}t} - 1) = \epsilon(t)e^{\frac{q_0}{q_1}t} - 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon(t) = \frac{p_0}{q_0}\sigma_0(1 - e^{-\frac{q_0}{q_1}t}),$$

a proto má creep funkce tvar

(4K) $$\mathcal{J}(t) = \frac{p_0}{q_0}(1 - e^{-\frac{q_0}{q_1}t}).$$

II.2.d Kelvinův model - relace napětí → deformace

Úpravou (1K) dostaneme $\sigma(t) = \frac{q_0}{p_0}\epsilon(t) + \frac{q_1}{p_0}\dot{\epsilon}(t)$.
Protože $\epsilon(0_+) = 0$ můžeme první sčítanec nahradit členem $\int_0^t \frac{q_0}{p_0}\dot{\epsilon}(\tau)d\tau$.
V appendixu A je dokázáno, že ve smyslu distribucí platí rovnost

$$\dot{\epsilon}(t) = \int_0^t \dot{\epsilon}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

Z výše uvedených důvodů platí

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{q_0}{p_0}\dot{\epsilon}(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{q_1}{p_0}\dot{\epsilon}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau,$$

a proto po sloučení obou integrálů a dosazení z (3K) dostáváme

(5K) $$\sigma(t) = \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau.$$

II.2.e Kelvinův model - relace deformace → napětí

Integrujme již odvozený vztah $\left(\epsilon(t)e^{\frac{q_0}{q_1}t}\right)^{\bullet} = \frac{p_0}{q_1}e^{\frac{q_0}{q_1}t}\sigma(t)$.

$$\begin{aligned}\epsilon(t)e^{\frac{q_0}{q_1}t} &= \frac{p_0}{q_1}\int_0^t \sigma(\tau)e^{\frac{q_0}{q_1}\tau}d\tau = \ldots \text{ per partes } \ldots = \\ &= \left[\frac{p_0}{q_1}\sigma(\tau)\frac{q_1}{q_0}e^{\frac{q_0}{q_1}\tau}\right]_0^t - \frac{p_0}{q_1}\frac{q_1}{q_0}\int_0^t \dot{\sigma}(\tau)e^{\frac{q_0}{q_1}\tau}d\tau = \\ &= \frac{p_0}{q_0}e^{\frac{q_0}{q_1}t}\Big(\sigma(0_+) + \int_0^t \dot{\sigma}(\tau)d\tau\Big) - \frac{p_0}{q_0}\sigma(0_+) - \frac{p_0}{q_0}\int_0^t \dot{\sigma}(\tau)e^{\frac{q_0}{q_1}\tau}d\tau\end{aligned}$$

Tedy $$\epsilon(t) = \sigma(0_+)\frac{p_0}{q_0}\Big(1 - e^{-\frac{q_0}{q_1}t}\Big) + \frac{p_0}{q_0}\int_0^t \dot{\sigma}(\tau)\Big(1 - e^{-\frac{q_0}{q_1}(t-\tau)}\Big)d\tau.$$

Dosazením z (4K) obdržíme hledané vyjádření

$$\epsilon(t) = \sigma(0_+)\mathcal{J}(t) + \int_0^t \dot{\sigma}(\tau)\mathcal{J}(t-\tau)d\tau. \tag{6K}$$

II.2.f Kelvinův model - shrnutí

Uveďme si opět grafy funkce napěťové relaxace a creep funkce:

obr.12 obr.13

Z nich je patrné, že Kelvinův model je modelem pro pevné látky a že creep funkce má velice dobrý průběh. Graf funkce napěťové relaxace je ovšem velmi nepřesný, protože odpovídá situaci, kdy napěťová relaxace je okamžitá.

III TŘÍPRVKOVÉ MODELY NENEWTONOVSKÝCH MATERIÁLŮ

Poté, co jsme v minulé kapitole ukázali, že dvouprvkové modely dovolují zachytit chování viskoelastických materiálů jen přibližně, se pokusíme o lepší shodu pomocí modelů tříprvkových.

Těch by se dala sestrojit jistě celá řada, ovšem nejlepších výsledků dosáhneme s těmi, u kterých využijeme jak obou typů prvků, tak i předností paralelního a sériového zapojení současně. Po této úvaze zjistíme, že stačí zkonstruovat "pouze" 4 modely, vždy dva a dva navzájem symetrické, to jest takové, že vzniknou záměnou tlumičů za pružiny a obráceně.

Ukáže se dokonce, že opět dva a dva modely mají natolik podobné popisující diferenciální rovnice (až na koeficienty), že matematický aparát, který odvodíme pro jeden z nich, bude vhodný i pro model druhý.

V této části poprvé použijeme i Laplaceovu transformaci. Všechny potřebné definice, tvrzení a ilustrující příklady nalezne čtenář v appendixu B. Tam je uvedena i tabulka, která značně usnadní práci při ověřování správnosti provedení inverzní Laplaceovy transformace.

Pro lepší přehlednost textu si dovolím rozdělit (poněkud Dixonovsky) zmíněné 4 modely do kapitol:

- tříprvkové modely s převahou pružin a
- tříprvkové modely s převahou tlumičů.

III.1 TŘÍPRVKOVÉ MODELY S PŘEVAHOU PRUŽIN

Nejprve ukážeme podobnost diferenciálních rovnic obou modelů:

Grafický popis

obr.14 obr.15

Rozbor sil

$$F = F_{P1} + F_M, \quad F_M = F_P = F_T \qquad\qquad F = F_{P1} = F_P + F_T$$

Geometrie

$$\Delta = \Delta_{P1} = \Delta_P + \Delta_T \qquad\qquad \Delta = \Delta_{P1} + \Delta_K, \quad \Delta_K = \Delta_T = \Delta_P$$

Vztahy

$$F_{P1} = E_{P1}\Delta, \quad F_P = E_P\Delta_P, \quad F_T = \mu_T\dot{\Delta}_T \qquad\qquad F_{P1} = E_{P1}\Delta_{P1}, \quad F_P = E_P\Delta_K, \quad F_T = \mu_T\dot{\Delta}_K$$

Deformační vztahy

$$\begin{aligned}\Delta E_{P1} = F_{P1} &= F - F_M = \\ &= F - \mu_T\dot{\Delta}_T = \\ &= F - \mu_T(\dot{\Delta} - \dot{\Delta}_P) = \\ &= F - \mu_T\left(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F}_P}{E_P}\right) = \\ &= F - \mu_T\left(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F} - \dot{F}_{P1}}{E_P}\right) = \\ &= F - \mu_T\left(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F} - \dot{\Delta}E_{P1}}{E_P}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= E_{P1}\Delta_{P1} = E_{P1}(\Delta - \Delta_K) = \\ &= E_{P1}\left(\Delta - \tfrac{F_P}{E_P}\right) = \\ &= E_{P1}\left(\Delta - \tfrac{F - F_T}{E_P}\right) = \\ &= E_{P1}\left(\Delta - \tfrac{F - \mu_T\dot{\Delta}_K}{E_P}\right) = \\ &= E_{P1}\left(\Delta - \tfrac{F - \mu_T(\dot{\Delta} - \dot{\Delta}_{P1})}{E_P}\right) = \\ &= E_{P1}\left(\Delta - \frac{F - \mu_T(\dot{\Delta} - \frac{\dot{F}}{E_{P1}})}{E_P}\right)\end{aligned}$$

Po úpravě spočtených výrazů obdržíme vztahy

(*) $$FE_P + \dot{F}\mu_T = \Delta E_P E_{P1} + \dot{\Delta}(\mu_T E_{P1} + \mu_T E_P) \qquad \text{a}$$

$$F(E_P + E_{P1}) - \mu_T\dot{F} = \Delta E_{P1}E_P - \mu_T E_{P1}\dot{\Delta}.$$

Jejich podobnost je zřejmá.

Zabývejme se tedy nadále jen modelem "vlevo". Protože nemá žádné standardní označení, říkejme mu *model A*.

III.1.a Rovnice modelu A

Upravíme-li rovnici (*) na tvar $F\frac{1}{\mu_T} + \dot{F}\frac{1}{E_P} = \Delta\frac{E_{P1}}{E_P} + \dot{\Delta}\Big(\frac{E_{P1}}{E_P} + 1\Big)$,
pak při označení $p_1 = \frac{1}{E_P 1}$, $p_0 = \frac{1}{\mu_T}$, $q_1 = 1 + \frac{E_{P1}}{E_P}$, $q_0 = \frac{E_{P1}}{\mu_T}$, platí

$$p_1\dot{F}(t) + p_0 F(t) = q_1\dot{\Delta}(t) + q_0\Delta(t).$$

Využitím symetrie rovnic síla $\leftrightarrow$ napětí (viz I.4) dostaneme

(1A) $$p_1\dot{\sigma}(t) + p_0\sigma(t) = q_1\dot{\epsilon}(t) + q_0\epsilon(t).$$

Počáteční podmínka:

Volme ϵ_n, σ_n omezené, $\sigma_n(0_+) = \epsilon_n(0_+) = 0$.
Integrací (1A) pro σ_n a ϵ_n od 0 do δ a provedením limitních přechodů $\delta \to 0$ a $n \to \infty$ získáme počáteční podmínku ve tvaru

(2A) $$p_1\sigma(0_+) = q_1\epsilon(0_+).$$

Pro další výpočty je výhodnější pracovat s transformovanou rovnicí
$$p_1\overline{\dot{\sigma}}(a) + p_0\overline{\sigma}(a) = q_1\overline{\dot{\epsilon}}(a) + q_0\overline{\epsilon}(a).$$
Aplikujme tvrzení o Laplaceově transformaci derivace :
$$ap_1\overline{\sigma}(a) - p_1\sigma(0_+) + p_0\overline{\sigma}(a) = aq_1\overline{\epsilon}(a) - q_1\epsilon(0_+) + q_0\overline{\epsilon}(a).$$
Z počáteční podmínky plyne

(3A) $$\overline{\sigma}(a)(p_1 a + p_0) = \overline{\epsilon}(a)(q_1 a + q_0).$$

III.1.b Model A - napěťová relaxace

Uvažujme opět $\epsilon(t) = \epsilon_0 \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\epsilon}(a) = \int_0^\infty e^{-at}\epsilon_0 dt = \frac{\epsilon_0}{a}$.
Upravme (3A)

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(a) &= \frac{\epsilon_0}{a}\Big(\frac{q_1 a + q_0}{p_1 a + p_0}\Big) \overset{trochu}{\underset{práce}{=}} \epsilon_0\Big(\frac{q_0}{p_0}\frac{1}{a} + \big(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_1}{p_0}\big)\frac{1}{a + \frac{p_0}{p_1}}\Big) = \\ &= \Big[\epsilon_0\frac{p_0}{q_0}\frac{1}{(-a)}e^{-at}\Big]_0^\infty + \Big[\epsilon_0\big(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0}\big)\frac{(-1)}{a + \frac{p_0}{p_1}}e^{-t(a + \frac{p_0}{p_1})}\Big]_0^\infty = \\ &= \int_0^\infty e^{-at}\Big(\epsilon_0\frac{q_0}{p_0} + \epsilon_0\big(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0}\big)e^{-\frac{p_0}{p_1}t}\Big)dt.\end{aligned}$$

Tím jsme nalezli funkci $\sigma(t) = \epsilon_0\Big(\frac{q_0}{p_0} + \big(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0}\big)e^{-\frac{p_0}{p_1}t}\Big)$.
Hledaná funkce napěťové relaxace má proto tvar

(4A) $$\mathcal{G}(t) = \frac{q_0}{p_0} + \Big(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0}\Big)e^{-\frac{p_0}{p_1}t}.$$

III.1.c Model A - creep

Protože $\sigma(t) = \sigma_0 \quad t \geq 0,$ je $\overline{\sigma}(a) = \frac{\sigma_0}{a}$.
Obdobným způsobem jako při odvozování funkce napěťové relaxace získáme

$$\epsilon(t) = \sigma_0\Big(\frac{p_0}{q_0} + (\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0})e^{-\frac{q_0}{q_1}t}\Big), \quad \text{takže}$$

$$\mathcal{J}(t) = \frac{p_0}{q_0} + \Big(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0}\Big)e^{-\frac{q_0}{q_1}t}. \tag{5A}$$

III.1.d Model A - relace napětí $\rightarrow$ deformace

Při napěťové relaxaci je

$$\overline{\sigma}(a) = \frac{q_1 a + q_0}{p1_a + p_0}\frac{\epsilon_0}{a}, \quad \text{a protože}$$

$$\overline{\mathcal{G}}(a) = \frac{\overline{\sigma}(a)}{\epsilon_0} = \frac{q_1 a + q_0}{p_1 a + p_0}\frac{1}{a}, \quad \text{platí}$$

$$\overline{\sigma}(a) = a\overline{\mathcal{G}}(a)\overline{\epsilon}(a) = \overline{\mathcal{G}}(a)\Big(a\overline{\epsilon}(a) - \epsilon(0+)\Big) + \overline{\mathcal{G}}(a)\epsilon(0_+) = \overline{\mathcal{G}}(a)\overline{\dot{\epsilon}}(a) - \overline{\mathcal{G}}(a)\epsilon(0_+).$$

Na tomto místě využijeme větu o Riemannově konvoluci (viz appendix B), která zaručuje rovnost $\int_0^\infty e^{-at}\Big(\int_0^t \mathcal{G}(t-s)\dot{\epsilon}(s)ds\Big)dt = \overline{\mathcal{G}}(a)\overline{\dot{\epsilon}}(a)$.
Jelikož

$$\int_0^\infty e^{-at}\epsilon(0_+)\mathcal{G}(t)dt = \epsilon(0_+)\overline{\mathcal{G}}(a), \quad \text{můžeme psát}$$

$$\sigma(t) = \epsilon(0_+)\mathcal{G}(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\dot{\epsilon}(s)ds, \tag{6A}$$

III.1.e Model A - relace deformace $\rightarrow$ napětí

Zcela analogickými úpravami jako v předchozím odstavci dospěji k

$$\epsilon(t) = \sigma(0_+)\mathcal{J}(t) + \int_0^t \mathcal{J}(t-s)\dot{\sigma}(s)ds. \tag{7A}$$

III.1.f Model A - shrnutí

Na obrázcích 16 a 17 vidíme, že tento tříprvkový model se svými vlastnostmi velmi blíží vlastnostem viskoelastických látek. Funkce napěťové relaxace stejně jako creep funkce mají takový průběh, jaký bychom od viskoelastických látek mohli očekávat. Z grafu creep funkce je také patrné, že se jedná o model pro pevnou látku, což se dalo intuitivně předpokládat vzhledem k tomu, že v modelu převládaly lineární pružiny - ideální modely pro newtonovskou pevnou látku.

obr.16 obr.17

III.2 TŘÍPRVKOVÉ MODELY S PŘEVAHOU TLUMIČŮ

Ukažme opět podobnost diferenciálních rovnic modelů:

Grafický popis

obr.18 obr.19

Rozbor sil

$F = F_{T1} = F_K = F_P + F_T$

$F = F_M + F_{T1}, \quad F_M = F_T = F_P$

Geometrie

$\Delta = \Delta_{T1} + \Delta_K, \quad \Delta_K = \Delta_T = \Delta_P$

$\Delta = \Delta_{T1} = \Delta_M = \Delta_T + \Delta_T$

Vztahy

$F_{T1} = \mu_{T1}\dot{\Delta}_{T1}, \quad F_T = \mu_T\dot{\Delta}_T,$
$F_P = E_P\Delta_P$

$F_{T1} = \mu_{T1}\dot{\Delta}_{T1}, \quad F_P = E_P\Delta_P,$
$F_T = \mu_T\dot{\Delta}_T$

Deformační vztahy

$$\begin{aligned}
F &= \mu_{T1}\dot{\Delta}_{T1} = \mu_{T1}(\dot{\Delta} - \dot{\Delta}_K) = \\
&= \mu_{T1}\big(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F}_P}{E_P}\big) = \\
&= \mu_{T1}\big(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F}-\dot{F}_T}{E_P}\big) = \\
&= \mu_{T1}\big(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F}-\mu_T\ddot{\Delta}_T}{E_P}\big) = \\
&= \mu_{T1}\big(\dot{\Delta} - \tfrac{\dot{F}-\mu_T(\ddot{\Delta}-\ddot{\Delta}_{T1})}{E_P}\big) = \\
&= \mu_{T1}\left(\dot{\Delta} - \frac{\dot{F}-\mu_T\left(\ddot{\Delta}-\frac{\dot{F}}{\mu_{T1}}\right)}{E_P}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta} &= \tfrac{F_{T1}}{\mu_{T1}} = \tfrac{F-F_T}{\mu_{T1}} = \\
&= \tfrac{F-\mu_T\dot{\Delta}_T}{\mu_{T1}} = \\
&= \tfrac{F-\mu_T(\dot{\Delta}-\dot{\Delta}_P)}{\mu_{T1}} = \\
&= \frac{F-\mu_T\left(\dot{\Delta}-\frac{\dot{F}_P}{E_P}\right)}{\mu_{T1}} = \\
&= \frac{F-\mu_T\left(\dot{\Delta}-\frac{\dot{F}-\dot{F}_{T1}}{E_P}\right)}{\mu_{T1}} = \\
&= \frac{F-\mu_T\left(\dot{\Delta}-\frac{\dot{F}-\ddot{\Delta}\mu_{T1}}{E_P}\right)}{\mu_{T1}}
\end{aligned}$$

Po úpravě spočtených výrazů obdržíme vztahy

$$(**) \qquad FE_P + \dot{F}(\mu_T + \mu_{T1}) = \dot{\Delta}\mu_{T1}E_P + \ddot{\Delta}\mu_{T1}\mu_T \qquad \text{a}$$
$$F + \dot{F}\frac{\mu_T}{E_P} = \dot{\Delta}(\mu_{T1} + \mu_T) + \ddot{\Delta}\frac{\mu_T\mu_{T1}}{E_P},$$

jejichž podobnost je zřejmá.

Nadále se budeme zabývat jen modelem "vlevo". Protože opět nemá žádné standardní označení, budeme ho nazývat *model B.*

III.2.a Rovnice modelu B

Využitím symetrie síla $\leftrightarrow$ napětí dostáváme z (**) vztah

$$\sigma(t)E_P + \dot{\sigma}(t)(\mu_T + \mu_{T1}) = \dot{\epsilon}(t)\mu_{T1}E_P + \ddot{\epsilon}(t)\mu_{T1}\mu_T,$$

a označíme-li $p_0 = E_P, \quad p_1 = \mu_T + \mu_{T1}, \quad q_0 = \mu_{T1}E_P, \quad q_1 = \mu_{T1}\mu_T,$ obdržíme rovnici ve tvaru

$$(1B) \qquad p_0\sigma(t) + p_1\dot{\sigma}(t) = q_0\dot{\epsilon}(t) + q_1\ddot{\epsilon}(t).$$

Počáteční podmínka:

Zaveďme znovu omezené $\sigma_n, \epsilon_n \quad \sigma_n(t) = 0 \quad t < 0, \quad \epsilon_n(t) = 0 \quad t < 0.$

Integrací (1B) pro σ_n a ϵ_n dostaneme

$$p_0\int_{-\delta}^{\delta}\sigma_n(t)dt + p_1\big(\sigma_n(\delta) - \sigma_n(-\delta)\big) = q_0\big(\epsilon_n(\delta) - \epsilon_n(-\delta)\big) + q_1\big(\dot{\epsilon}_n(\delta) - \dot{\epsilon}_n(-\delta)\big).$$

Provedme ještě jednu integraci od $-\Delta$ do Δ

$$p_0\int_{-\Delta}^{\Delta}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\sigma_n(t)dt\right)d\delta + p_1\int_{-\Delta}^{\Delta}\sigma_n(\delta)d\delta = q_0\int_{-\Delta}^{\Delta}\epsilon_n(\delta)d\delta + q_1\big(\epsilon_n(\Delta) - \epsilon_n(-\Delta)\big),$$

odkud z omezenosti σ_n, ϵ_n plyne $\quad \epsilon(0_+) = 0.$

Vrátíme-li se k jednou integrované rovnici, obdržíme po provedení limitních přechodů $\delta \to 0$ a $n \to \infty$

$$p_1\sigma(0_+) = q_1\dot{\epsilon}(0_+).$$

Úhrnem

$$(2B) \qquad \epsilon(0_+) = 0, \quad p_1\sigma(0_+) = q_1\dot{\epsilon}(0_+).$$

Použitím Laplaceovy transformace na rovnici (1B):

$$p_1\overline{\dot{\sigma}}(a) + p_0\overline{\sigma}(a) = q_1\overline{\ddot{\epsilon}}(a) + q_0\overline{\dot{\epsilon}}(a), \quad \text{tedy}$$
$$p_1a\overline{\sigma}(a) - p_1\sigma(0_+) + p_0\overline{\sigma}(a) = q_0a\overline{\epsilon}(a) - q_0\epsilon(0_+) + q_1a^2\overline{\epsilon}(a) - q_1a\epsilon(0_+) - q_1\dot{\epsilon}(0_+).$$

A z počáteční podmínky (2B) plyne, že

$$\overline{\sigma}(a)(p_1 a + p_0) = \overline{\epsilon}(a)(q_1 a^2 + q_0 a). \tag{3B}$$

III.2.B Model B - napěťová relaxace

Uvažujme $\epsilon(t) = \epsilon_0 \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\epsilon}(a) = \frac{\epsilon_0}{a}$.
Z rovnice (3B) dostáváme $\overline{\sigma}(a) = \epsilon_0 \frac{q_1 a + q_0}{p_1 a + p_0}$.
Rozepsáním zlomku do vhodného tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{q_1 a + q_0}{p_1 a + p_0} &= \frac{q_1 a}{p_1\left(a + \frac{p_0}{p_1}\right)} + \frac{q_0}{p_1\left(a + \frac{p_0}{p_1}\right)} = \frac{q_1}{p_1} - \frac{q_1 \frac{p_0}{p_1{}^2}}{a + \frac{p_0}{p_1}} + \frac{q_0}{p_1\left(a + \frac{p_0}{p_1}\right)} = \\
&= \frac{q_1}{p_1} + \left(\frac{q_0}{p_1} - \frac{q_1 p_0}{p_1{}^2}\right)\left(\frac{1}{a + \frac{p_0}{p_1}}\right) = \\
&= \int_0^\infty \delta(t)\frac{q_1}{p_1} e^{-at} dt - \int_0^\infty \left(\frac{q_0}{p_1} - \frac{q_1 p_0}{p_1{}^2}\right) e^{-(a + \frac{p_0}{p_1})t} dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-at}\left[\delta(t)\frac{q_1}{p_1} + \left(\frac{q_1 p_0}{p_1{}^2} - \frac{q_0}{p_1}\right) e^{-\frac{p_0}{p_1}t}\right] dt
\end{aligned}$$

ihned vidíme, že

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{p_1}\left(\delta(t) q_1 + \frac{q_1 p_0 - q_0 p_1}{p_1} e^{-\frac{p_0}{p_1}t}\right). \tag{4B}$$

III.2.C Model B - creep

Mějme $\sigma(t) = \sigma_0 \quad t > 0, \quad \Rightarrow \quad \overline{\sigma}(a) = \frac{\sigma_0}{a}$. Z (3M) $\overline{\epsilon}(a) = \frac{\sigma_0}{a^2} \frac{p_1 a + p_0}{q_1 a + q_0}$.
Rozkladem na parciální zlomky obdržíme rovnost

$$\overline{\epsilon}(a) = \sigma_0 \left(\frac{\frac{p_0}{q_0}}{a^2} + \frac{\frac{p_0 q_1{}^2}{q_0{}^2} - \frac{p_1 q_1}{q_0}}{q_1 a + q_0} + \frac{\frac{p_1}{q_0} - \frac{p_0 q_1}{q_0{}^2}}{a}\right),$$

která dá po úpravě vztah

$$\overline{\epsilon}(a) = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{q_0}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{q_0{}^2}(p_0 q_1 - p_1 q_0)\frac{1}{a + \frac{q_0}{q_1}} + \frac{1}{q_0{}^2}(p_1 q_0 - p_0 q_1)\frac{1}{a}\right)$$

a ten nahlédnutím do tabulky v appendixu okamžitě převedeme na

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{q_0} t + \frac{1}{q_0{}^2}(p_0 q_1 - p_1 q_0) e^{-\frac{q_0}{q_1}t} + \frac{1}{q_0{}^2}(p_1 q_0 - p_0 q_1)\right).$$

Creep funkce má tedy tvar

$$\mathcal{J}(t) = \frac{p_0}{q_0} t + \frac{1}{q_0{}^2}(p_0 q_1 - p_1 q_0) e^{-\frac{q_0}{q_1}t} + \frac{1}{q_0{}^2}(p_1 q_0 - p_0 q_1).$$

III.2.d Model B - relace napětí → deformace

Můžeme postupovat zcela analogicky jako při vyjadřování relace napětí → deformace modelu A.

Výsledkem je

(6B)
$$\sigma(t) = \epsilon(0_+)\mathcal{G}(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\dot{\epsilon}(s)ds.$$

III.2.e Model B - relace deformace → napětí

Opět analogií dostáváme

(7B)
$$\epsilon(t) = \sigma(0_+)\mathcal{J}(t) + \int_0^t \mathcal{J}(t-s)\dot{\sigma}(s)ds.$$

III.2.f Model B - shrnutí

obr.20 obr.21

Grafy creep funkce a funkce napěťové relaxace dokazují, že právě zkonstruovaný model má všechny vlastnosti, které můžeme požadovat od modelu pro tekutinu, omezíme-li se na kritéria vyslovená v kapitole I.4. Důležité je pro nás především chování při creepu, protože dvouprvkový model pro tekutiny (Maxwellův) zde dosáhnul pouze lineární aproximace.

IV ZÁVĚR

Zhodnoťme stručně dosažené výsledky.

Jednoprvkové modely vytyčují jasné hranice mezi pevnou látkou a tekutinou, nejsou však schopny zachytit vlastnosti viskoelastických materiálů. Slouží nám jen jako stavební prvky modelů složitějších.

Dvouprvkové modely dosahují při porovnání s reálnými viskoelastickými materiály dobré shody, trpí ale tím, že ze dvou požadovaných charakteristik splňují vždy jen jednu.

Konečně tříprvkové modely jsou k simulaci viskoelastických materiálů nejvhodnější; model A pro pevné látky a model B pro tekutiny. Oba splňují všechna kritéria sestavená v úvodu této práce. Analýzou modelu B jsme nepřímo potvrdili i popularitu tzv. Oldroyd-B modelu, který je hojně využíván v inženýrské praxi. Model B lze totiž získat z Oldroyd-B modelu, uvažujeme-li smykové proudění (viz [J&L]).

Podařilo se nám také u všech modelů naleznout taková vyjádření, že je můžeme zařadit jak do třídy modelů rychlostního [viz rovnice (1M)+(2M), (1K)+(2K), (1A)+(2A), (1B)+(2B)] tak i integrálního typu [rovnice (5M)+(6M), (5K)+(6K), (6A)+(7A), (6B)+(7B)].

Tyto dva přístupy vedou ke dvěma různým zobecněním teorie mechanických analogů do dvou a tří dimenzí. Toto zobecnění, které je nejednoznačné, však svou obtížností přesahuje rámec této práce.

Literatura:

[Sch] W.R.Schowalter, *Mechanics of non-newtonian fluids*, Pergamon Press, 1977.

[Hui] R.R. Huilgol, *Continuum mechanics of viscoelastic liquids*, Hindusthan Publishing Corporation, Delhi, 1975.

[Raj] K.R. Rajagopal, *Mechanics of non-newtonian fluids*, Recent Developments in Theoretical Fluid Mechanics, (editoři G.P. Galdi, J. Nečas), Pitman Research Notes in Mathematics Series 291, Longman Scientific & Technical, Essex, pp. 129–162.

[W&R] A. Wineman a K.R. Rajagopal, *Viscoelasticity*, (nepublikováno), Převzaty též obrázky, 1984.

[Fri] B. Friedman, *Lectures on applications-oriented mathematics*, Chapter 1, A Wiley Interscience Publication, 1991.

[Prü] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser Verlag 1993.

[J&L] G.A. Johnson a G.A. Livesay, *A Note Regarding a Mechanical Analog for an Oldroyd-B Fluid.*

APPENDIX A - DIRACOVO ZOBRAZENÍ A DELTA FUNKCE

Definice: *Diracovo zobrazení soustředěné v bodě* $t_0 \in \mathbb{R}$ je definováno na prostoru všech nekonečně hladkých reálných funkcí s kompaktním nosičem, tj.

$$\delta_{t_0} : C_K^\infty \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{dané předpisem}$$
$$\delta_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0) \qquad \forall \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}).$$

Vyslovíme 3 definice a potom ukážeme některé důležité vlastnosti Diracova zobrazení.

Definice: Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$.

Řekneme, že $\varphi_n \to \varphi$ v $C_K^\infty(\mathbb{R})$, jestliže

a) existuje kompakt $G \subset \mathbb{R}$ takový, že nosič $\varphi_n \subset G$ a nosič $\varphi \subset G$,

b) $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$ v $\mathbb{R}$.

Definice: Nechť F : $C_K^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že F je *sekvenciálně spojité*, jestliže

$$\big(\varphi_n \to \varphi \text{ v } C_K^\infty(\mathbb{R})\big) \quad \Rightarrow \quad \big(F(\varphi_n) \to F(\varphi) \text{ v } \mathbb{R}\big).$$

Definice: Zobrazení F : $C_K^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, které je sekvenciálně spojité (a tedy i lineární) se nazývá *distribuce*.

Lemma: Diracovo zobrazení soustředěné v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ je distribuce.

Důkaz: volme libovolně $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in C_K^\infty$.

linearita:

$$\delta_{t_0}(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi)(t_0) = \alpha\varphi(t_0) + \beta\psi(t_0) = \alpha\delta_{t_0}(\varphi) + \beta\delta_{t_0}(\psi)$$

sekvenciální spojitost:

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{v} \quad C_K^\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi_n(t_0) \to \varphi(t_0) \quad \text{v} \quad \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \delta_{t_0}(\varphi_n) \to \delta_{t_0}(\varphi) \quad \square$$

Pro naše účely postačí Diracovo zobrazení soustřeďené v bodě 0, tj. zobrazení definované předpisem $\delta_0(\varphi) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_K^\infty$.

Ukážeme, že Diracovo zobrazení soustředěné v bodě 0 nelze ztotožnit s žádnou integrovatelnou funkcí $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$:

sporem: nechť to lze, tedy $\exists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ taková, že

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C_K^\infty.$$

$$\varphi \in C_K^\infty \Rightarrow x\varphi(x) \in C_K^\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\big(x\varphi(x)\big)dx = 0\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_K^\infty.$$

To ale znamená, že $xf(x) = 0$ skoro všude $\Rightarrow f = 0$ skoro všude v $\mathbb{R}$, což je spor s (*). $\square$

Protože jsme ukázali, že zobrazení δ_0 nelze ztotožnit z žádnou integrovatelnou funkcí, pokusíme se alespoň nalézt vhodné funkce u_n, které ho aproximují, tzn. chceme, aby platilo:

$$\delta_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx, \text{ kde } \delta(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Položme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takto:

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{n}, +\infty), \\ 2n(1-nt) & t \in (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Pro názornost uvádím graf nějaké u_n :

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} 2n \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)\varphi(t)dt = \ \dots \text{ subst. nt=s} \dots \ =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\int_0^1 (1-s)\varphi(\frac{s}{n})ds \overset{(+)}{=} 2\int (1-s) \lim_{n\to\infty} \varphi(\frac{s}{n})ds =$$

$$= 2\varphi(0)\int_0^1 (1-s)ds = \varphi(0).$$

Rovnost označená (+) plyne např. z Lebesgueovy věty, neboť φ je na $\mathbb{R}$ spojitá a tudíž na [0,1] omezená funkce a totéž platí pro funkci 1-s.

Zobrazení (symbolickou funkci) $\delta = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

nazveme *delta funkce.*

Na závěr nadefinujme ještě funkce $H_n(t) = \int_{-\infty}^t u_n(\tau)d\tau$.
Potom $H_n \to H$, kde H je tzv. *Heavisideova funkce* definovaná předpisem

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Zároveň platí $\dot{H}_n(t) = u_n(t)$, takže ve smyslu distribucí je

$$\dot{H}(t) = \lim_{n\to\infty} \dot{H}_n(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \delta(t).$$

APPENDIX B - LAPLACEOVA TRANSFORMACE

V tomto dodatku nadefinujeme Laplaceovu transformaci a ukážeme některá základní tvrzení.

Definice: Zobrazení $\mathcal{L} : L_1(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)(a) := (L)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f(t) dt$$

nazveme *Laplaceova transformace* funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$, kde příslušný Lebesgueův integrál konverguje.

Funkce $\big(\mathcal{L}(f)\big)$ se nazývá *obraz* funkce f v Laplaceově transformaci.

Funkce f se nazývá *vzor* Laplaceova obrazu $\big(\mathcal{L}(f)\big)$.

Úmyslně jsme se omezili jen na reálný parametr $\underline{a}$, protože to pro naše účely postačí. Laplaceova transformace bývá definována na komplexních číslech.

V samotné práci používám pro Laplaceovu transformaci značení $\overline{f}$ místo $\big(\mathcal{L}(f)\big)$.

Nyní ukážeme některá tvrzení a příklady ilustrující vlastnosti Laplaceovy transformace.

Příklady Laplaceových transformací:

V příkladech 1 - 3 položíme vždy $f(t) = 0, t < 0$.

1) $f(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\forall a > 0 \quad \overline{f}(a) = \int_0^{\infty} e^{-at} 1 dt = \frac{1}{a}$$

2) $f(t) = e^{ct}, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\forall a > c \quad \overline{f}(a) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{ct} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a-c)t} dt = \frac{1}{a-c}$$

3) $f(t) = t, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\overline{f}(a) = \int_0^{\infty} e^{-at} t dt \underset{per\ partes}{=} \Big[te^{-at}\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}$$

4) V appendixu A jsme ukázali, že platí $\int_0^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C_K^{\infty}(\mathbb{R})$.

Totéž platí i pro funkce z $C^{\infty}(\mathbb{R})$, které se při $x \to \infty$ velmi rychle blíží k nule. Proto

$$\overline{\delta}(a) := \int_0^{\infty} e^{-at}\delta(t)dt = 1.$$

<u>Tvrzení</u>: (O derivaci obrazu Laplaceovy transformace)

Nechť $f \in C^n\big((0,\infty)\big)$ a existuje $\overline{f}(a)$ v $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\overline{f^{(n)}}(a) = a^n\overline{f}(a) - a^{n-1}f(0_+) - a^{n-2}f^{(1)}(0_+) - ... - f^{(n-1)}(0_+).$$

Důkaz: indukcí (sestupnou)

$$\begin{aligned}\overline{f^{(n)}}(a) &= \int_0^\infty e^{-at}f^{(n)}(t)dt \underset{per\ partes}{=} \\ &= \Big[e^{-at}f^{(1)}(t)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-at}f^{(n-1)}(t)dt = \\ &= -f^{(n)}(0_+) + a\overline{f^{(n-1)}}(a).\end{aligned}$$

□

<u>Tvrzení</u>: (Laplaceova transformace Riemannovy konvoluce)

Nechť f_1, f_2 mají Laplaceovu transformaci v $a \in \mathbb{R}$. Nechť g je Riemannova konvoluce funkcí f_1, f_2, tj.

$$g(t) = \int_0^\infty f_1(t-s)f_2(s)ds = (f_1 * f_2)(t). \quad \text{Potom}$$

$$\overline{g}(a) = \overline{f_1}(a)\overline{f_2}(a).$$

Na závěr uvedeme tabulku, která nám pomůže při hledání vzorů Laplaceových obrazů (při provádění inverzní Laplaceovy transformace):

obraz $\overline{\mathbf{f}(a)}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a-c}$	$\frac{1}{a^2}$	1
vzor f(t)	1	e^{ct}	t	$\delta(t)$